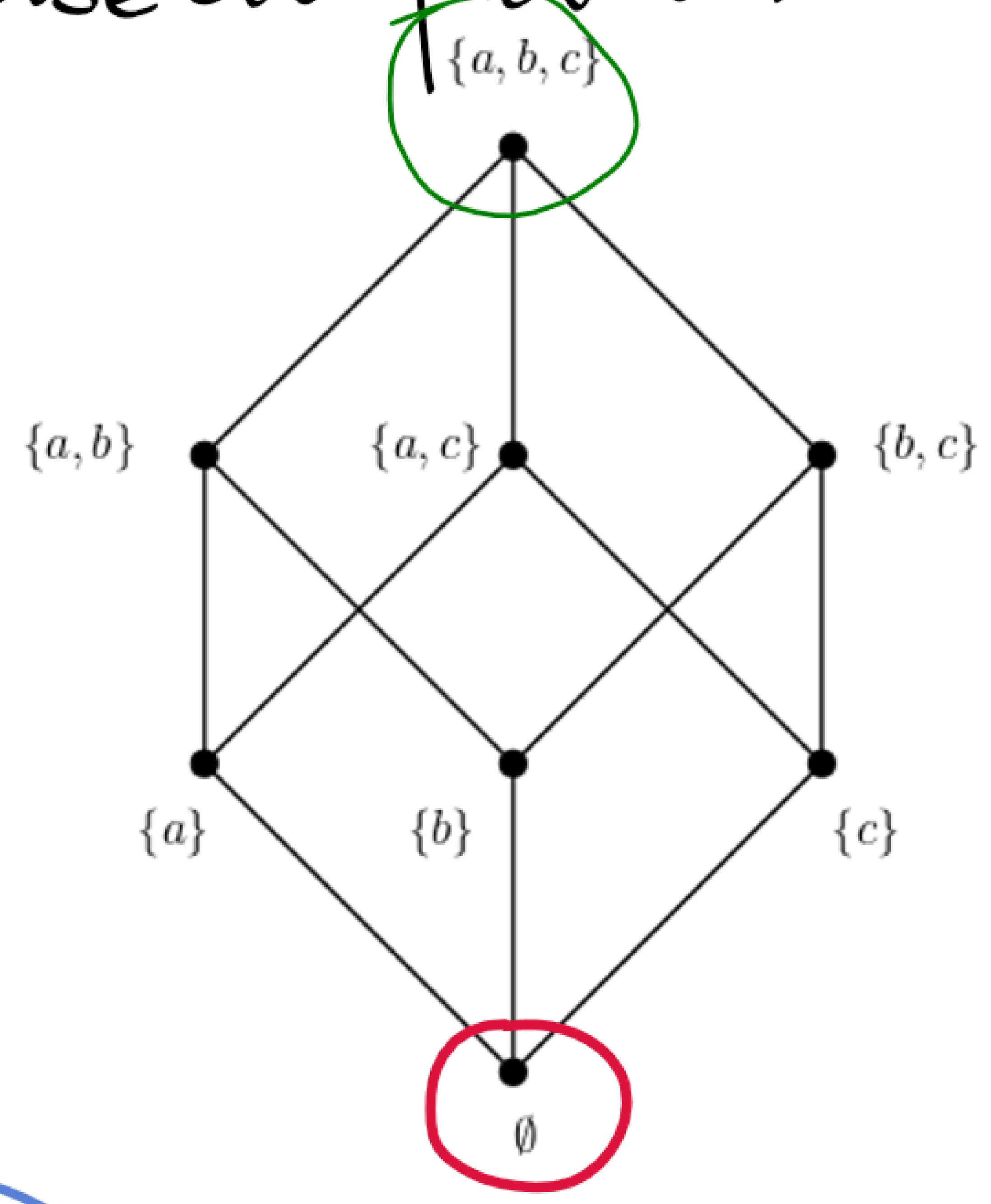
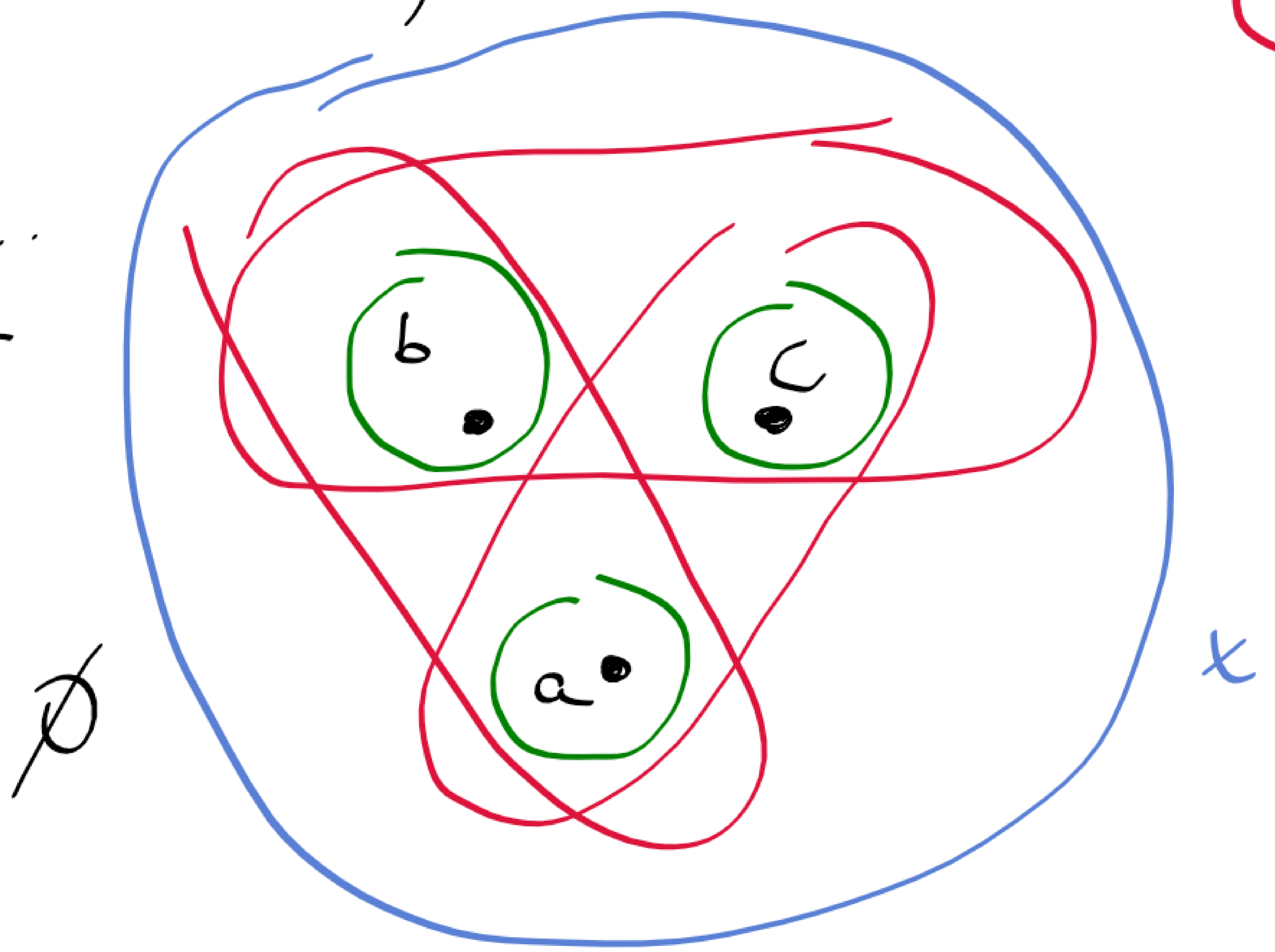
Minule: $(P(X), \subseteq)$ … uspořádání potence množiny X inklusí.
(Zde $P(X)$ je množina všech podmnožin X)

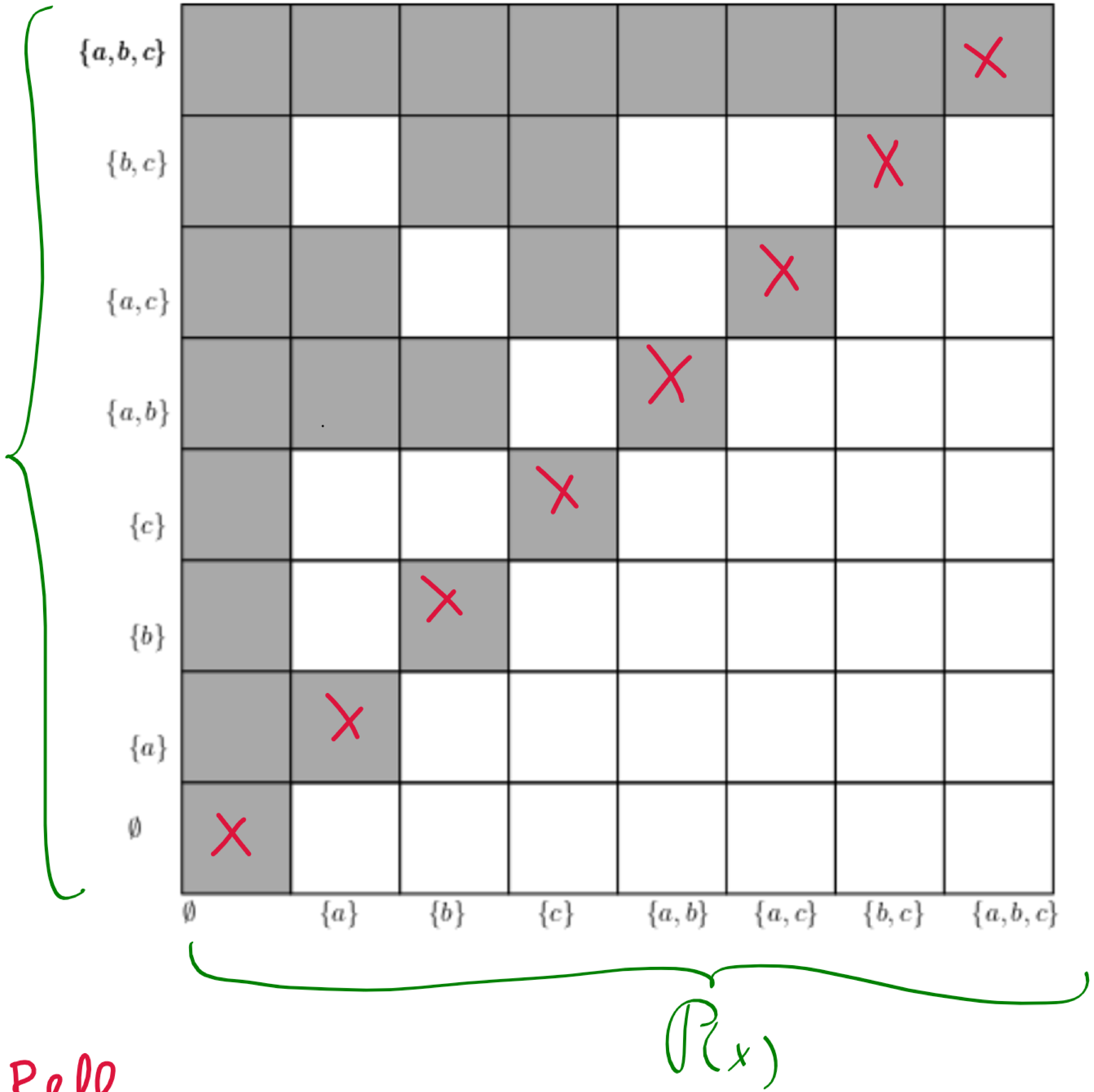
Příklad: $X = \{a, b, c\}$



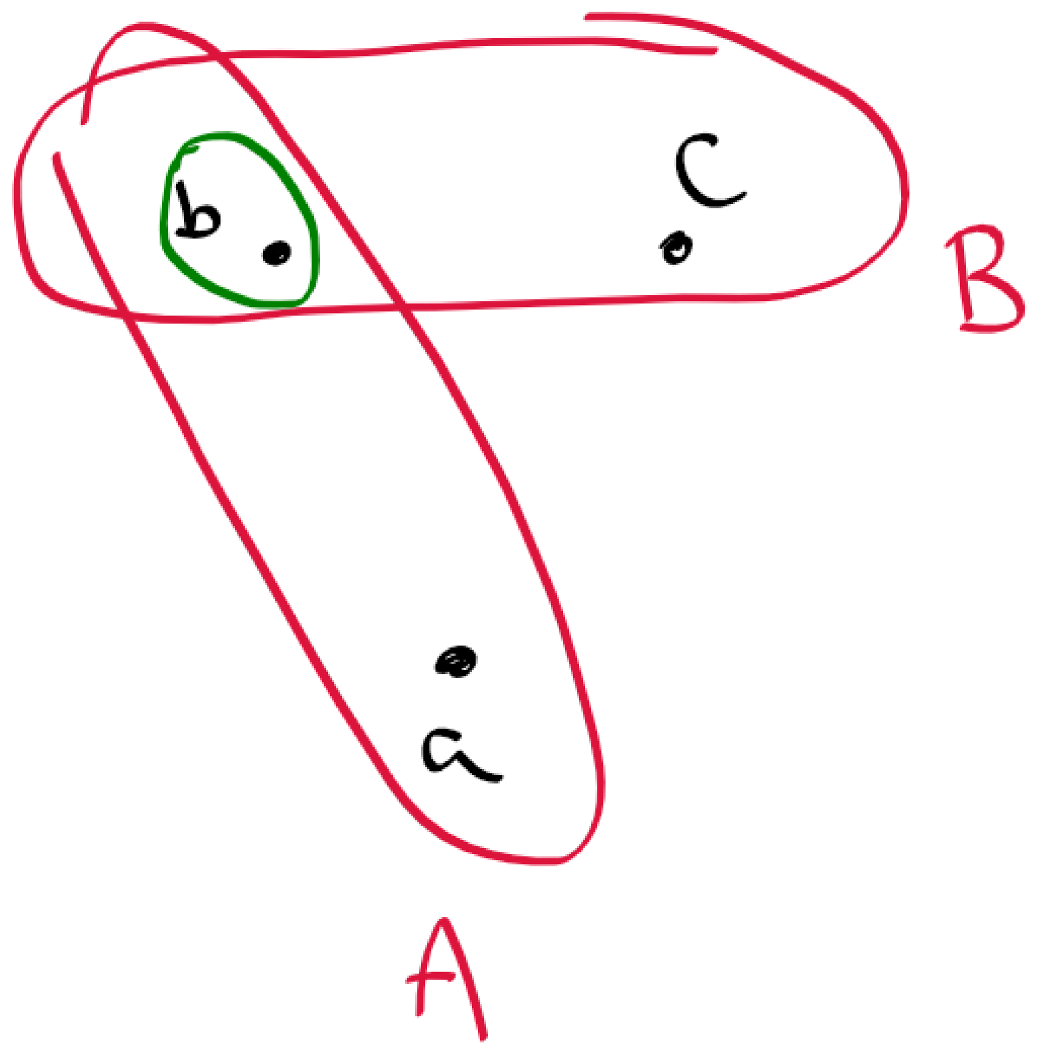
neostré usp. inklusí $\subseteq$.
(slabě antisym., refl., transitivní).

Jiný obr.





Refl.



$\{A,B\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ... je to nějaká množina v naší ČUM $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

$\inf\{A,B\}$ ... nějaký prvek $\mathcal{P}(X)$ splňující jisté podm.

Dolní závory $\{A,B\}$ jsou

$\emptyset$, $\{b\} = A \cap B \implies \inf\{A,B\} = \{b\}$.

Připomenu: dobré uspořádání:

$(A, \le)$ je dobré u., pokud

$\forall B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$: B má nejmenší prvek.

Definice: ČUM $(A, \le)$ je úplný svaz, pokud každá neprázdná $B \subseteq A$ má supremum i infimum.

Příklady:
- $(\mathbb{N}, \le)$ ✗
- $([0,1], \le)$ $([0,1] \subseteq \mathbb{R})$. je úplný svaz podle axiomu o supremu
- $(\mathbb{R}, \le)$ ✗ ($[0,\infty)$ nemá sup)

$\infty \notin \mathbb{R}$

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ s rozšířeným usp. $\leq$
  ($\forall x \in \mathbb{R}: -\infty \leq x \leq \infty$).

$(\mathbb{R}^*, \leq)$ je úplný svaz.

<u>Tvrzení</u>: Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ úplný svaz.

<u>Značení</u>: Buď A libovolná množina (množin). Značíme

- $\bigcup A = \bigcup_{a \in A} a = \{ z : \exists a \in A : z \in a \}$

- $\bigcap A = \bigcap_{a \in A} a = \{ z : \forall a \in A : z \in a \}$

<u>např.</u> $\bigcup \{a, b\} = a \cup b$

$\bigcap \{x, y, z\} = x \cap y \cap z$

$\bigcap \{X_i : i \in \mathbb{N}\} = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \ldots$
$= \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$

$x = \{1, 2, 3, 4\}$, $y = \{2, 4, 6, 8\}$,
$z = \{2, 3, 5, 7\}$

$\bigcap \{x, y, z\} = \{2\}$
$= x \cap y \cap z =$

$\bigcup \{x, y, z\} =$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Důkaz: $((\mathcal{P}(x), \subseteq)$ je úplný svaz.$)$

Uvažujme libovolnou podmnožinu $A \subseteq \mathcal{P}(x)$.
Chceme ukázat, že A má vzhledem k uspořádání $\subseteq$ sup i infimum.

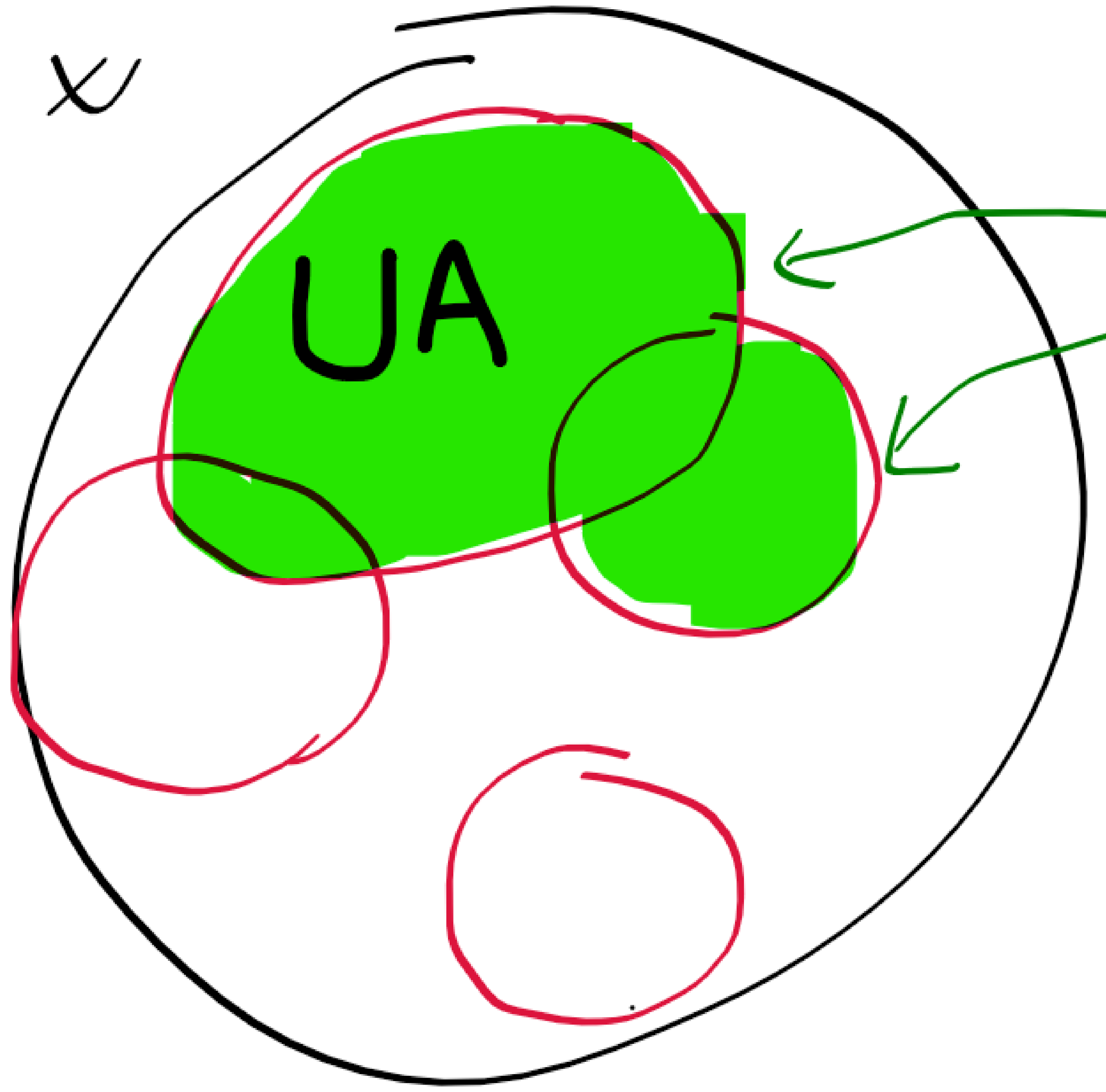
Sup: Tvrdím, že $\bigcup A = \sup A$.

$\Big(A \subseteq \mathcal{P}(x) \Rightarrow \bigcup A \subseteq x$

tj. $\bigcup A \in \mathcal{P}(x)$ tj. je to prvek ČUM $(\mathcal{P}(x), \subseteq)$, a přichází tedy v úvahu jako sup. $\Big)$

(a) $\bigcup A$ je horní závora A, tj.

$\forall a \in A: a \subseteq \bigcup A$. Zřejmé.



— podmnožiny x prvky $\mathcal{P}(x)$

prvky A

$A \subseteq \mathcal{P}(x)$

$\bigcup A \subseteq x$

$\bigcup A \in \mathcal{P}(x)$.

(b) nejmenší horní závora:

Buď z je horní závora A.

Chci: $\bigcup A \subseteq z$.

Zřejmé, protože $\forall a \in A: a \subseteq z$.

Tedy i $\bigcup A \subseteq z$.

Tedy $\bigcup A$ je $\sup A$. Podobně $\bigcap A = \inf A$. $\boxtimes$

„Zobrazení = funkce"

Definice: • funkce je libovolná relace F (na množině X) splňující:

$$\forall u \in X \;\; \forall v \in X \;\; \forall w \in X: \;\; ((u,v) \in F \wedge (u,w) \in F) \rightarrow v = w$$

„funkční h. v bodě u"

• místo $(u,v) \in F$ pak píšeme $F(u) = v$

Pozn.: kdyby $\lim a_n = a \;\wedge\; \lim a_n = b \;\wedge\; a \neq b$

$$a = \lim a_n = b \overset{\text{TRANZ.}}{\Longrightarrow} a = b \quad ↯$$

„Sporné značení" Naštěstí je limita je určena jednoznačně.

• F je prostá: $\forall u \in X \; \forall u' \in X$:

$$F(u) = F(u') \longrightarrow u = u'.$$

(V řeči relací:

$$\forall u \in X \;\; \forall v \in X \;\; \forall w \in X: \;\; ((u,w) \in F \wedge (v,w) \in F) \rightarrow u = v$$

„F je zobrazení $\Rightarrow$ F^{-1} je prostá"

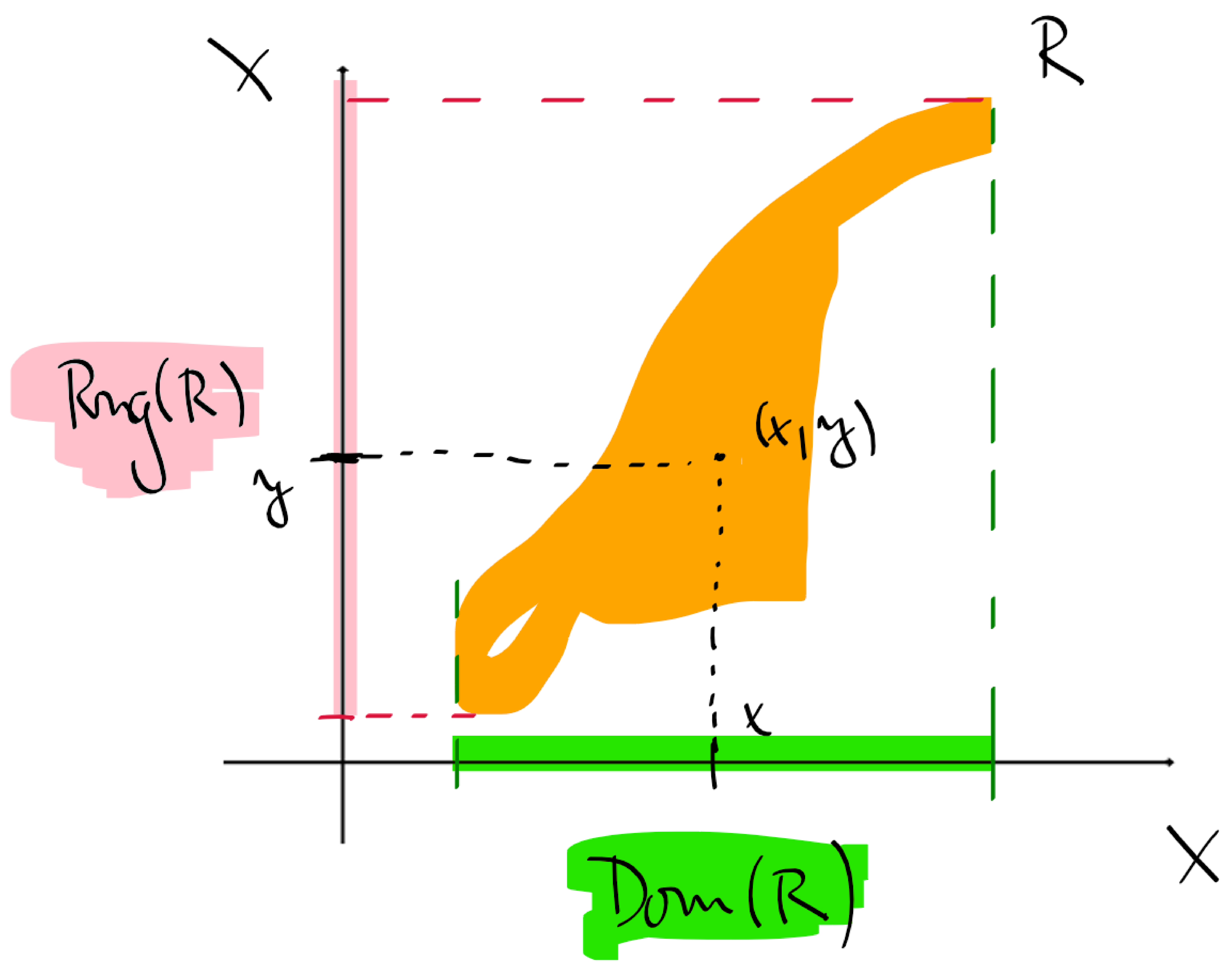
„F je prostá $\Rightarrow$ F^{-1} je zobrazení"

„inverzní fce je prostá automaticky"

k funkci

• F je na Y, pokud $\mathrm{Rng}\, F = Y$.

Pozn.: Dom(R), Rng(R) na obrázku



Definice (množinová mocnina) Buďte X, Y libovolné množiny. Definujeme

$$^{X}Y = \{ f \;:\; \underset{\text{Dom}(f)}{\underset{\parallel}{f: X}} \to Y \text{ je funkce} \}$$

Y ← obsahuje Rng(f).

Příklad: $\{a, b, c\} = X$, $\{0, 1\} = Y$

$f: X \to Y$ funkce. např.:

$f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $f(c) = 0$

Tabulka f:

a	b	c
0	1	0

← podstatná info.

Všechny možnosti:

0,0,0
0,0,1
0,1,0
0,1,1
1,0,0
1,0,1
1,1,0
1,1,1

$|X| = 5$

$|Y| = 3$

$|{}^{X}Y| = 3^5$

apod.

\# možností:

2^3

3 prvky — X

Y — 2 prvky

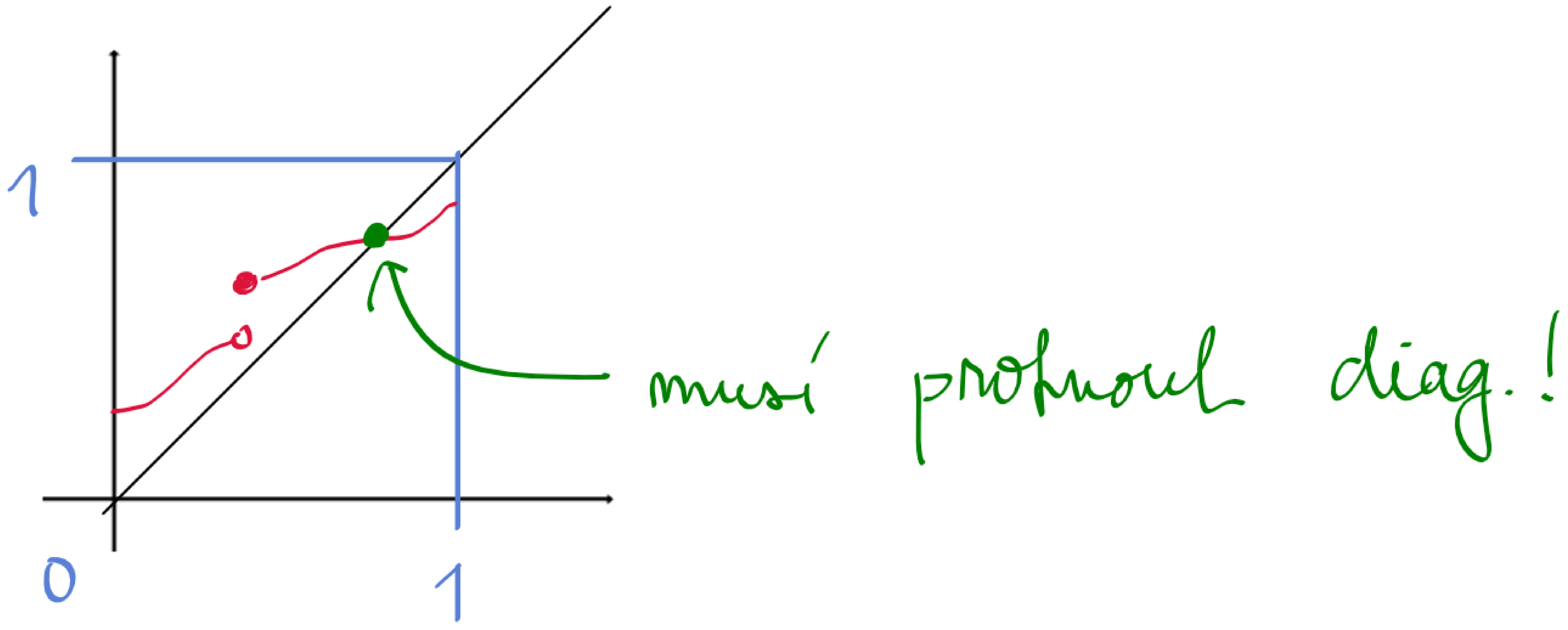
Definice (neklesající fce): Buď $(A, \leq)$ ČUM.
Pak $f: A \to A$ je neklesající $\overset{def}{\iff}$

$$\forall x, y \in A : \quad x \leq y \to f(x) \leq f(y).$$

Definice: $f: A \to A$ buď fce. Pak $u \in A$ je pevný bod, pokud $f(u) = u$.

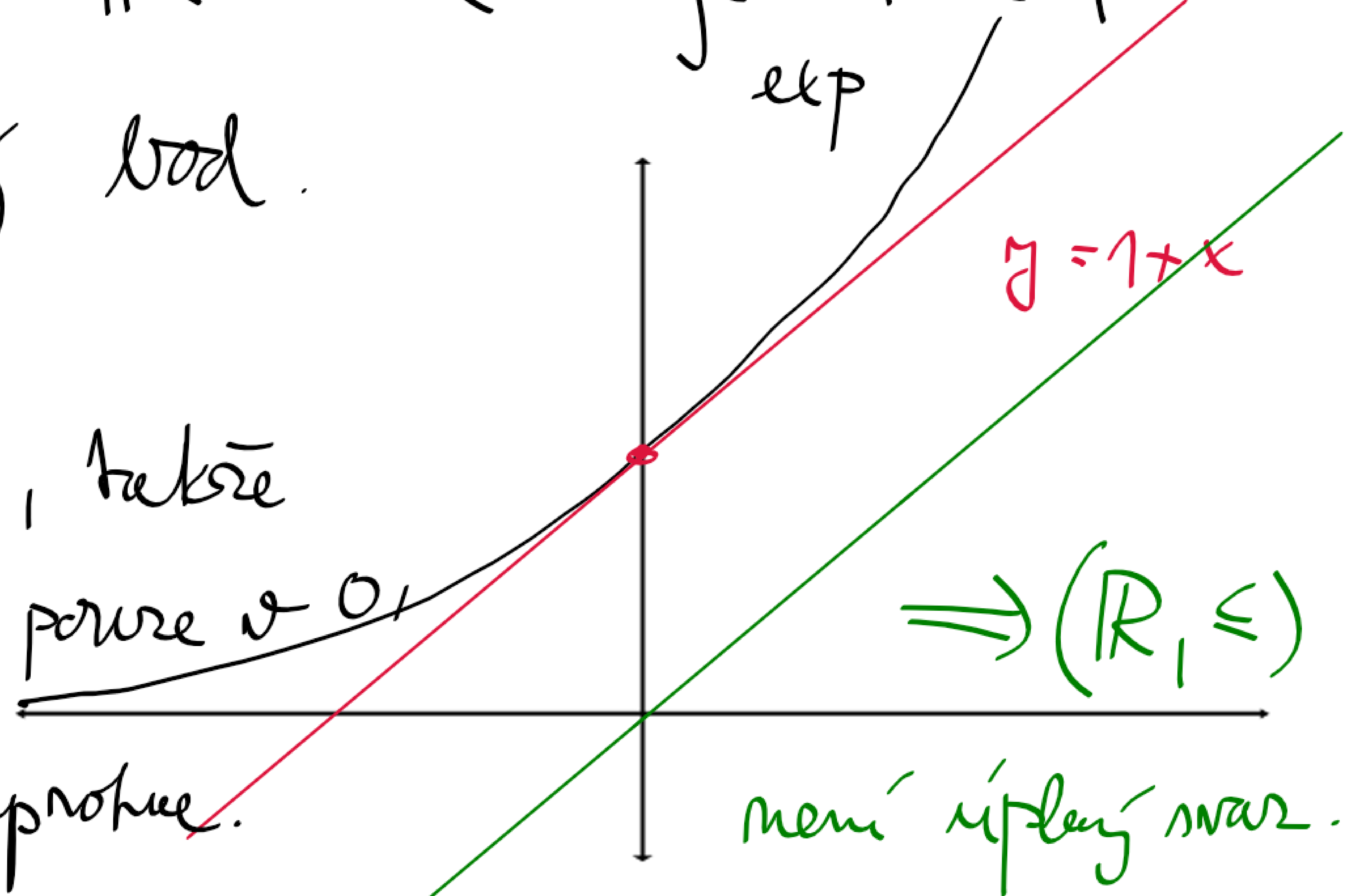
Věta (O pevném bodě)
Neklesající fce na úplném svazu má pevný bod.

Příklad: $([0,1], \leq)$ je úplný svaz. Tedy libovolná funkce $f: [0,1] \to [0,1]$ má pevný bod (tj. graf protne diagonálu)



Pokud nejde o úplný svaz, nemusí „být pevný bod“:

Př.: $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající, ale nemá pevný bod.



exp je konv., takže $y = 1 + x$ protne pouze v 0, takže diag. neprotne.